# Logica matematica

Terza lezione

Quantificatori.

Vi sono diversi tipi di inferenze logiche che non possono essere giustificate sulla base del calcolo proposizionale.

Per analizzare la struttura delle proposizioni in maniera più dettagliata, introduciamo il *quantificatore universale* **(x)** e il *quantificatore esistenziale* **(Ex)**. Se, per esempio, P(x) significa che x ha la proprietà P, allora (x)P(x) vuol dire che la proprietà P vale per ogni x, mentre (Ex)P(x) sta ad indicare che esiste qualche x per cui vale la proprietà P o, se si preferisce, (Ex)P(x) è un altro modo di scrivere ¬((x)¬P(x)).

Siano m, g, p, s, A(x,y), U(x), I(x), A'(x), t(x)

| simbolo | significato | Inferenze simboliche | Significato delle inferenze |
|---|---|---|---|
| m | Marco | (x) (A(x,m)⊃A(x,g))<br>¬A(p,g)<br>¬A(p,m) | |
| g | Giovanni | | |
| p | Pietro | | |
| s | Socrate | (x) (U(x)⊃I(x))<br>U(s)<br>I(s) | |
| A(x,y) | x è amico di y | | |
| U(x) | x è un uomo | | |
| I(x) | x è immortale | (x)(U(x)⊃A'(x))<br>(x)(Ey(x=t(y) ∧ U(y))⊃ Ey(x=t(y)∧A'(y)) | |
| A'(x) | x è un animale | | |
| t(x) | la testa di x | | |

Per rappresentare in modo simbolico le inferenze che contengono quantificatori useremo:

| | | |
|---|---|---|
| **, ¬ ⊃ ( )** | Simboli e connettivi del calcolo proposizionale | |
| $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ | Variabili individuali | |
| $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}$ | Costanti individuali | |
| $A^1_1, A^1_2, \dots, A^j_k$ | Lettere predicative | L'indice in alto indica il numero degli argomenti, quello in basso distingue una lettera dall'altra. |
| $f^1_1, f^1_2, \dots, f^j_k$ | Lettere funzionali | |
| | | |

Diamo ora alcune definizioni.

***Termini***.:

a) variabili e costanti individuali sono termini;

b) se $\mathbf{f^n_i}$ è una lettera funzionale e $\mathbf{t_1, \dots, t_n}$ sono termini, $\mathbf{f^n_i(t_1, \dots, t_n)}$ è un termine.

c) Un'espressione è un termine solo se tale risulta sulla base di a) e b).

---

***Formule atomiche***:

Se $\mathbf{A^n_i}$ è una lettera predicativa e $\mathbf{t_1, \dots, t_n}$ sono termini, $\mathbf{A^n_i(t_1, \dots, t_n)}$ è una formula atomica.

---

***Formule ben formate:***

a) ogni formula atomica è una fbf;

b) se **A e B** sono fbf e y è una variabile, allora **¬A, A⊃B, e (y)A** sono fbf;

c) un'espressione è una fbf solo se tale risulta in base alle condizioni a) e b).

---

***Campo d'azione di un quantificatore:***

- In **(y)A, A** è il campo d'azione del quantificatore **y**. A può anche non contenere y. In tal caso (y) A e A indicano la stessa cosa.

---

***Occorrenza libera e vincolata di una variabile in una fbf***:

- **L'occorrenza** di una variabile ***x*** si dice **vincolata** se essa è **la variabile di un quantificatore (x)** nella fbf oppure se **si trova nel campo d'azione di un quantificatore (x*)*** nella fbf, altrimenti l'occorrenza si dice **libera**.
- Una variabile si dice libera ( vincolata) in una fbf se ha un'occorrenza libera (vincolata). Una variabile può essere, quindi, contemporaneamente libera e vincolata in una fbf.
- Se **A**$(\mathbf{x_{i1},\dots, x_{in}})$ è una fbf, indicheremo con $\mathbf{A(t_1,\dots, tn)}$ il risultato della sostituzione, in **A**, delle occorrenze libere (se ve ne sono) di $\mathbf{x_{i1}, \dots, x_{in}}$ con, rispettivamente, $\mathbf{t_1,\dots,t_n}$.

---

***Termine libero per la variabile $x_i$ in una fbf A***:

Se **A** è una fbf e **t** un termine, allora **t** si dice **libero per per $\mathbf{x_i}$ in A**, se e solo se nessuna occorrenza libera di $x_i$ in A si trova nel campo d'azione di un quantificatore $\mathbf{(x_j)}$, dove $x_j$ è una variabile in **t.**