Bruno de Finetti: *"la probabilità non esiste!"*.

V. Colagrande

Il quesito n. 7 dell'Esame di Stato 2006 risulta così formulato:

Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

Si riporta anzitutto il commento dello stesso de Finetti alla sua frase.

Da: da Bruno de Finetti, Enciclopedia Einaudi, Voce: "Probabilità".
<<La probabilità: chi è costei?

Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero "esiste" la probabilità? e cosa mai sarebbe? Io risponderei di no, che non esiste. Qualcuno, cui diedi questa risposta (ribadita, col motto in tutte maiuscole – PROBABILITY DOES NOT EXIST- nella prefazione all'inglese di Teoria delle probabilità [1970]), mi chiese ironicamente perché mai, allora, me ne occupo.

Mah! Potrei anche dire, viceversa e senza contraddizione, che la probabilità regna ovunque, che è, o almeno dovrebbe essere, la nostra 'guida nel pensare e nell'agire', e che perciò mi interessa. Soltanto, mi sembra improprio, e perciò mi urta, vederla concretizzata in un sostantivo, "probabilità", mentre riterrei meglio accettabile e più appropriato che si usasse soltanto l'aggettivo, "probabile", o, meglio ancora, soltanto l'avverbio, "probabilmente".

Dire che la probabilità di una certa asserzione vale 40 per cento appare- purtroppo!- come espressione concreta di una verità apodittica. Non pretendo né desidero che tale modo di esprimersi vada bandito, ma certo è che l'asserzione apparirebbe assai più appropriatamente formulata se la si ammorbidisse dicendo, invece, che quel fatto lo si giudica "probabile al 40 per cento", o, meglio ancora (a parte che suona male), che ci si attende "al 40 per cento- probabilmente" che sia o che risulti vero.

Il guaio è che il realismo (come accuratamente osservò Jeffreys) ha il vantaggio che il linguaggio è stato creato da realisti, e per di più da realisti molto "primitivi", ed è perciò che "noi abbiamo larghissime possibilità di descrivere le proprietà attribuite agli oggetti, ma scarsissime di descrivere quelle direttamente conosciute come sensazioni" [Theory of Probability, 1939, p.394].

Da ciò la mania (che forse per altri è invece indizio di saggezza, serietà, accuratezza) di assolutizzare, di concretizzare, di oggettivare perfino quelle che sono soltanto proprietà dei nostri atteggiamenti soggettivi. Non altrimenti si spiegherebbe lo sforzo di fare della Probabilità qualcosa di nobler than it is (sempre parole di Jeffreys), nacondendone la natura soggettiva e gabellandola per oggettiva. Secondo la spiritosa fantasia di Hans Freudenthal si tratterebbe di uno strano pudore per impedire di farci vedere la Probabilità "come Dio l'ha fatta": occorre una "foglia di fico", e spesso la si riveste tutta di foglie di fico rendendola addirittura invisibile o irriconoscibile.>>

La probabilità ha, in sostanza, una natura "soggettiva": è *"una misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce al verificarsi di un dato evento E, sulla base delle sue opinioni ed informazioni sull'evento e il principio di coerenza"*.

Per introdurre tale misura di probabilità si farà riferimento allo *schema della scommessa coerente*, ma va detto che non è l'unica strada percorribile: si potrebbe, ad esempio, far riferimento al concetto di *utilità.*

Una qualunque scommessa comporta per un *giocatore* A un guadagno o una perdita, cioè un guadagno per un avversario (un *banco* B). Si richiede che la *scommessa* sia *coerente*, cioè che lo scommettitore A sia disposto a scambiare il posto con il banco B. Ciò implica che non sono ammessi guadagni certi (o perdite certe) né per A né per B, prima di avere informazioni "certe" sul verificarsi o meno di E. Un guadagno certo per lo scommettitore comporta, infatti, una sua perdita certa quando scambia il posto con il banco.

Indicata con C la somma di denaro che il giocatore è disposto a pagare al banco B, per ottenere la somma di denaro S posta in gioco se l'evento E si verifica, e con I(E) è l'indicatore di E (vale 1 se E è vero, 0 altrimenti), il guadagno G "aleatorio" può essere ottenuto come:

$$G = S \cdot I(E) - C.$$

Se G_A rappresenta il guadagno dello scommettitore e G_B quello del banco, in una scommessa sull'evento E si avrà:

$$G_A = S \cdot I(E) - C = S\,[I(E) - p] \quad \text{e} \quad G_B = C - S \cdot I(E) = S\,[p - I(E)],$$

avendo posto $p = C/S$.

In particolare:

- se E si verifica: $G_A(E) = S - C = S(1-p)$ e $G_B(E) = C - S = S(p-1)$,
- se E non si verifica (cioè si verifica $\overline{E}$): $G_A(\overline{E}) = -C = -Sp$ e $G_B(\overline{E}) = C = Sp$.

La condizione di coerenza implica che *non può essere* $G_A > 0$ oppure $G_B > 0$ sia nel caso che E si verifichi sia nel caso contrario.

Non si può avere allora:

$$\begin{cases} G_A(E) = S(1-p) > 0 \\ G_A(\overline{E}) = -Sp > 0 \end{cases}, \qquad \text{cioè} \begin{cases} p - 1 < 0 \\ p < 0 \end{cases}$$

pertanto *p non può assumere valori negativi* (cioè deve essere $p \geq 0$).

Non si può avere neppure**:**

$$\begin{cases} G_B(E) = S(p-1) > 0 \\ G_B(\overline{E}) = Sp > 0 \end{cases}, \qquad \text{cioè} \begin{cases} p - 1 > 0 \\ p > 0 \end{cases}$$

pertanto *p non può assumere valori maggiori di 1* (cioè deve essere $p \leq 1$).

Allora i valori accettabili per p risultano solo quelli appartenenti all'intervallo reale [0,1].

In particolare, se E è l'evento certo ($E = \Omega$) si ha:

$$G_A(E) = S(1-p) \quad \text{e} \quad G_B(E) = S(p-1)$$

e, per la coerenza, non può essere né $1 - p > 0$ né $p - 1 > 0$ e quindi deve essere $p = 1$.

In modo analogo, se E è l'evento impossibile ($E = \emptyset$) si deve escludere sia $p > 0$ sia $-p > 0$ per cui deve essere $p = 0$.

Il numero reale p che figura nelle formule precedenti è, per definizione, la probabilità che un individuo (lo scommettitore, ad esempio) attribuisce all'evento E.

Va osservato che p (la "*quota unitaria di scommessa*") indica quanto l'individuo è pronto a pagare al banco in una scommessa coerente per ottenere una somma unitaria qualora l'evento E si verifichi.

La scelta di $p = p(E)$ attraverso la suddetta "procedura operativa", soggetta alla condizione di coerenza, si può effettuare in qualunque situazione di incertezza.

Se, poi, si considerano *più eventi* $E_1, E_2, \ldots, E_n$, delle combinazioni di *scommesse* su di essi di importi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ e quote $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e il guadagno:

$$G = \sum_{i=1}^{n} S_i\left(I(E_i) - p_i\right),$$

le p_i costituiscono una valutazione coerente se non è possibile scegliere una particolare combinazione degli importi S_i che assicurino guadagno comunque gli eventi si svolgano.

Per inciso va anche detto che dalla definizione soggettiva si ottengono sia la *misura classica* che la *misura frequentista* di probabilità.

Naturalmente si potrebbe argomentare ancora moltissimo sulla tematica, ma ci si limita a quanto detto e per i lettori interessati si segnala un sito Internet sulla figura di *Bruno de Finetti* che va senz'altro visitato:

http://www.brunodefinetti.it/.