

### La meccanica quantistica come modello matematico.

(Da "I fondamenti concettuali della meccanica quantistica" di Abner Shimony, "La nuova Fisica" a cura di Paul Davis Bollati Boringhieri).

- A) La conoscenza dello stato di un sistema ci deve permettere di prevedere i risultati di qualunque misura appropriata che si possa fare su di esso.
- B) Supponiamo che lo stato sia dipendente dal tempo, cioè contenga le proprietà causali del sistema (evoluzione deterministica).

Nel caso di un sistema dinamico formato da una particella che si muove soggetta a una forza che dipende dalla posizione lo stato può essere descritto mediante uno spazio di dimensione 6 ( $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ ) in quanto la sola posizione non è sufficiente a determinare la causalità del sistema stesso.

La proprietà A) è soddisfatta definendo osservabili appropriate, quali, ad esempio, il momento angolare  $f(x, p) = x \wedge p$ .

In generale gli stati di un sistema di  $N$  particelle sono rappresentati in spazi di dimensione  $6N$ .

In meccanica quantistica manca un legame intuitivo tra la matematica e la fisica.

La natura astratta della matematica utilizzata si basa proprio sull'aspetto più fondamentale della meccanica quantistica: non è possibile prevedere i risultati esatti delle misure fatte su un sistema, ma solo le probabilità di ottenere certi valori.

La novità della meccanica quantistica consiste nel fatto che la conoscenza del sistema è intrinsecamente probabilistica, nel senso che non può essere migliorata raccogliendo ulteriori informazioni sul suo comportamento.

In meccanica quantistica assegnare uno stato permette di calcolare solo le probabilità dei risultati delle misure, non i risultati medesimi e sono queste probabilità che evolvono in maniera causale.

Gli STATI di un sistema quantistico si possono rappresentare come elementi di uno SPAZIO VETTORIALE, in modo tale che a ogni possibile risultato di una misura di un'osservabile corrisponda un certo vettore del medesimo spazio, e che la probabilità di trovare quel particolare risultato, se il sistema si trova in uno stato rappresentato da un vettore diverso, sia il quadrato del coseno dell'angolo compreso tra i due vettori.

Fondamenti concettuali della meccanica quantistica.

Innovazioni radicali introdotte nel modo di ragionare quantistico: indeterminazione oggettiva, casualità oggettiva, probabilità oggettiva, potenzialità, mescolamento di stati e non località.

Innovazioni concettuali della meccanica quantistica.

*I concetti di indeterminazione, caso, probabilità e mescolamento.*

In relazione a un sistema, chiamiamo ALTERNATIVA una grandezza che può assumere i valori Vero o Falso.

Secondo la fisica classica, la specificazione di uno STATO del sistema determina la verità o la falsità di tutte le sue alternative.

In Meccanica quantistica, nella determinazione più completa di un sistema (lo STATO) permangono alternative per cui non si può affermare né che siano VERE, né che siano FALSE.

Si parla allora di INDETERMINAZIONE OGGETTIVA.

Se pensiamo a un qualche procedimento (di misura o altro) che permetta di selezionare un particolare valore di un'alternativa  $a$  indeterminata in uno stato  $S$ , il valore ottenuto non è determinato né da  $S$ , né dagli STATI degli altri sistemi che entrano nel processo.

Si tratta di CASUALITÀ OGGETTIVA che dipende, a sua volta, dalla indeterminazione oggettiva ed è, pertanto, una proprietà tipicamente quantistica.

In tal caso possiamo associare al valore selezionato una PROBABILITÀ OGGETTIVA, così definita, perché dipende solo dallo stato  $S$  e dall'alternativa  $a$ .

Seguendo Heisenberg potremmo definire *potenziale* un'alternativa indeterminata in uno stato  $S$ .

Una procedura che determina un particolare valore di  $a$  si dice che realizza una potenzialità.

In fisica classica lo stato di un sistema composto 1+2 a un istante  $t$  è completamente determinato dagli stati di 1 e 2 separatamente, purché ciascuno dei due contenga sufficienti informazioni relativamente all'altro.

Se i due sistemi interagiscono, l'evoluzione dell'uno dipende dall'evoluzione dell'altro, ma in ogni istante gli stati di 1 e 2 possono essere caratterizzati indipendentemente.

In meccanica quantistica, invece, il sistema 1+2 può trovarsi, a un certo istante, in uno stato mescolato, nel senso che nessuno dei due si trova in uno stato definito, ma lo stato composto sì.

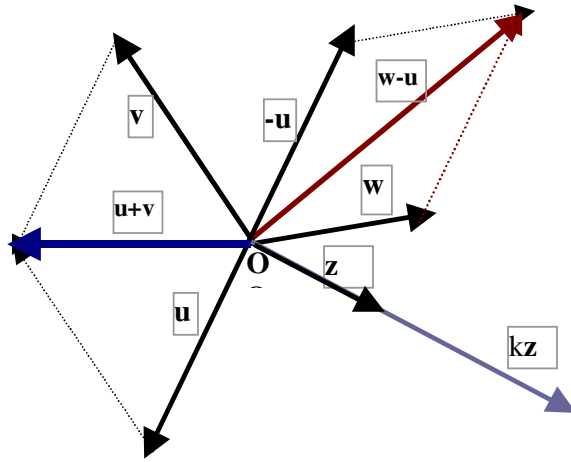
In uno stato mescolato le potenzialità di 1 e 2 sono così intrecciate che esistono coppie di alternative,  $a_1$  per il sistema 1 e  $a_2$  per il sistema 2, che sono entrambe indeterminate e tali che, quando vengono realizzate mediante opportune procedure risultano essere entrambe vere o entrambe false.

Alcuni preliminari matematici.

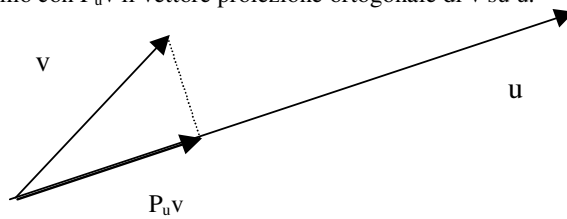
Diamo per scontata la conoscenza delle fondamentali proprietà di un spazio vettoriale  $V$

Consideriamo tutti i vettori applicati in  $O$ : segmenti orientati (s.o.) che hanno come primo estremo un fissato punto  $O$  e come secondo estremo un qualsiasi punto  $P$  dello spazio.

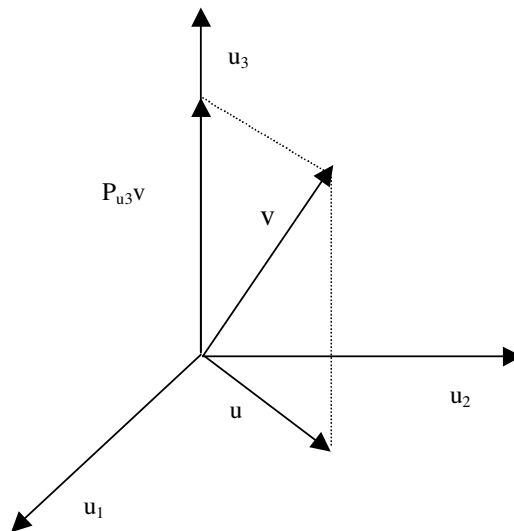
La somma (o la differenza) tra due di questi vettori o il prodotto di un vettore per uno scalare è ancora un vettore dello stesso tipo.



Sappiamo utilizzare queste operazioni con le relative proprietà.  
 Abbiamo un modello intuitivo di spazio vettoriale  $V$ .  
 La lunghezza di un vettore si indica con  $\|u\|$ .  
 Dati due vettori,  $u$  e  $v$ , indichiamo con  $P_u v$  il vettore proiezione ortogonale di  $v$  su  $u$ .



Possiamo pensare alla dimensione dello spazio vettoriale come al massimo numero di vettori tra loro ortogonali. In uno spazio di dimensione tre, per esempio, possiamo trovare al massimo tre vettori tra loro ortogonali.



Tutti i vettori  $u$  della forma  $u = ku_1 + hu_2$ , con  $k$  e  $h$  in  $\mathbb{R}$  (in  $\mathbb{C}$ ), formano un sottospazio di dimensione 2 che chiamiamo  $E$ , per cui i vettori  $u$  possono essere individuati come proiezione ortogonale di  $v$  su  $E$ ,  $u = P_E v$ , mentre i vettori del tipo  $P_{u_3} v$  possono essere indicati con il simbolo  $P_{E^\perp} v$ , in quanto tali vettori appartengono al sottospazio  $E^\perp$  di  $V_3$  ortogonale a  $E$ .

Per ogni vettore  $v$  di  $V_3$  si può, quindi, scrivere (\*)  $v = P_E v + P_{E^\perp} v$ .

Le considerazioni precedenti si possono estendere facilmente a uno spazio vettoriale  $V_n$ , di dimensione  $n$ , nel senso che, per qualunque sottospazio  $E$ , è possibile determinare il sottospazio ortogonale  $E^\perp$  in maniera tale che valga (\*).

Osservazione: per poter utilizzare gli spazi vettoriali nella meccanica quantistica è necessario considerare numeri complessi invece che reali e dimensione infinita (oltre che finita).

Se consideriamo  $v=av_1+bv_2$ , si può constatare che  $P_E v = P_E(av_1+bv_2) = aP_E(v_1) + bP_E(v_2)$ . Questo è un esempio di operatore lineare definito in uno spazio vettoriale.

Definiamo un altro concetto importante per la meccanica quantistica : lo spazio vettoriale ottenuto come **PRODOTTO TENSORIALE** a partire da due spazi vettoriali. Lo facciamo con un esempio.

Consideriamo  $U(u_1, u_2)$  e  $V(v_1, v_2, v_3)$ , due spazi vettoriali di dimensione 2 e 3, rispettivamente, di cui i vettori entro parentesi, di norma unitaria e ortogonali tra loro, rappresentano le basi.

Indichiamo con  $U \otimes V$  lo spazio prodotto tensoriale, di dimensione  $2 \cdot 3 = 6$  e avente come base i vettori  $u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, u_1 \otimes v_3, u_2 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, u_2 \otimes v_3$  di norma unitaria e ortogonali tra loro.

Per fissare le idee, si può pensare che il vettore  $u_2 \otimes v_3$ , per esempio, di coordinate  $(0,0,0,0,0,1)$  si ottiene da  $u_2(0,1)$  e  $v_3(0,0,1)$  moltiplicando ciascuna delle coordinate di  $u_2$  per ciascuna delle coordinate di  $v_3$ .

I vettori  $\Psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} u_i \otimes v_j$ , al variare di  $c_{ij}$  in  $\mathbb{C}$  (o in  $\mathbb{R}$ ) sono gli elementi dello spazio vettoriale ottenuto come

prodotto tensoriale degli spazi  $U$  e  $V$ .

Si può osservare che, in generale, non è possibile esprimere un qualsiasi tensore  $\psi$  nella forma

$\psi = u \otimes v$ , con  $u \in U, v \in V$ .

Infatti, se così fosse, da  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  e  $v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3$  si avrebbe

$$\psi = c_1 d_1 u_1 \otimes v_1 + c_1 d_2 u_1 \otimes v_2 + c_1 d_3 u_1 \otimes v_3 + c_2 d_1 u_2 \otimes v_1 + c_2 d_2 u_2 \otimes v_2 + c_2 d_3 u_2 \otimes v_3$$

$$\psi = c_{11} u_1 \otimes v_1 + c_{12} u_1 \otimes v_2 + c_{13} u_1 \otimes v_3 + c_{21} u_2 \otimes v_1 + c_{22} u_2 \otimes v_2 + c_{23} u_2 \otimes v_3.$$

$c_1 d_1$	$c_{11}$	$c_1 = 1$	$d_1$	$c_{11}$	
$c_1 d_2$	$c_{12}$		$d_2$	$c_{12}$	
$c_1 d_3$	$c_{13}$		$d_3$	$c_{13}$	
$c_2 d_1$	$c_{21}$		$c_2$	$c_{21}/c_{11}$	
$c_2 d_2$	$c_{22}$		$c_2 d_2$	$c_{22}$	$c_{22} = (c_{21}/c_{11}) \cdot c_{12}$
$c_2 d_3$	$c_{23}$		$c_2 d_3$	$c_{23}$	$c_{23} = (c_{21}/c_{11}) \cdot c_{13}$

Ora, supponendo noti i coefficienti  $c_{ij}$ , assegnando un valore arbitrario a  $c_1$  risultano determinati, dalle prime tre relazioni di uguaglianza dei coefficienti,  $d_1, d_2$  e  $d_3$ . Ma allora la quarta, ad esempio, mi permette di determinare  $c_2$ . A questo punto sarebbero determinati  $c_{22}$  e  $c_{23}$ , contro l'ipotesi che  $\psi$  sia un tensore qualunque del prodotto tensoriale. Enunciamo ora i principi formali della meccanica quantistica.

**Principio 1.**

A ogni sistema fisico è associato uno spazio vettoriale complesso  $V$  in maniera tale che ogni vettore di lunghezza (norma) unitaria rappresenti uno stato del sistema.

**Principio 2.**

Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle alternative presenti nel sistema e l'insieme dei sottospazi che lo descrive, nel senso che ogni vettore rappresentante di uno stato in cui l'alternativa  $a$  è vera appartiene all'insieme  $E_a$  che determina il sottospazio. Viceversa, ogni vettore rappresentante di uno stato in cui l'alternativa  $a$  è falsa appartiene all'insieme  $E_{\perp}$ .

Commento: il P2 non significa che, dato uno stato  $S$  del sistema, ogni alternativa debba essere necessariamente vera o falsa, perché, evidentemente, un vettore rappresentante di  $S$  può non appartenere né a  $E_a$ , né a  $E_{\perp}$ .

**Principio 3.**

Se il sistema si trova inizialmente in uno stato  $S$  e viene eseguita una procedura per determinare un'alternativa  $a$  corrispondente al sottospazio  $E_a$ , la probabilità che tale alternativa risulti vera è data da

$$\text{probs}(a) = \|P_E v\|^2$$

Dove  $v$  è un vettore unitario che rappresenta  $S$ .

Nei tre principi esposti è implicito il famoso principio di sovrapposizione che può essere dedotto alla maniera seguente: siano  $u_1$  e  $u_2$  due versori ortogonali con  $u_1 \in E_a$  e  $u_2 \in E_{\perp}$ . Esiste un'alternativa  $a$  che è vera nello stato rappresentato da  $u_1$  e falsa nello stato rappresentato da  $u_2$ .

Consideriamo ora il vettore  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ , con  $c_1$  e  $c_2 \neq 0, c_1^2 + c_2^2 = 1$ , otteniamo uno stato in cui l'alternativa  $a$  non è né vera né falsa, ma indeterminata.

**Principio 4.**

Si considerino due sistemi fisici associati agli spazi vettoriali  $V_1$  e  $V_2$ , allora il sistema 1+2, composto dei sistemi dati, è associato al prodotto tensoriale  $V_1 \otimes V_2$ .

Consideriamo  $u_1, v_1 \in V_1$  e  $u_2, v_2 \in V_2$ , con  $u_1$  ortogonale a  $v_1$  e  $u_2$  ortogonale a  $v_2$ .

Il vettore (tensore)  $\psi = (u_1 \otimes u_2 + v_1 \otimes v_2)1/\sqrt{2}$  rappresenta uno stato di 1+2, ma non esistono due vettori  $w$  e  $z$ , rispettivamente di  $V_1$  e  $V_2$ , tali che  $\psi = w \otimes z$ .

In altre parole, per la definizione di  $\psi$  si applica il principio di sovrapposizione agli stati  $u_1 \otimes u_2$  e  $v_1 \otimes v_2$ , ciascuno dei quali ha significato anche per il senso comune, per generare uno stato che non è interpretabile secondo il senso comune: uno stato mescolato.

Relazione tra mescolamento e indeterminazione oggettiva: se l'alternativa  $a_1$  è vera nello stato  $u_1$  (quindi falsa nello stato  $v_1$ ) e se  $a_2$  è vera nello stato  $u_2$  (quindi falsa in  $v_2$ ),  $a_1$  e  $a_2$  hanno probabilità  $1/2$  di essere entrambe vere o entrambe false nello stato mescolato  $\psi$  e probabilità nulla di essere una vera e l'altra falsa.

Se i sistemi 1 e 2 sono ben separati nello spazio, il mescolamento dà luogo a una sorta di non località e la realizzazione correlata delle potenzialità di 1 e 2 appare come un processo non locale.

**Principio 5.**

Se nell'intervallo compreso tra gli istanti 0 e  $t$  il sistema è immerso in un ambiente non reattivo, esiste un operatore lineare  $U(t)$  tale che, se  $v$  rappresenta lo stato del sistema all'istante 0, allora  $U(t)v$  rappresenta lo stato all'istante  $t$ . Inoltre  $U(t)$  conserva le lunghezze, cioè  $\|U(t)v\| = \|v\|$  per ogni vettore  $v$  di  $V$ .

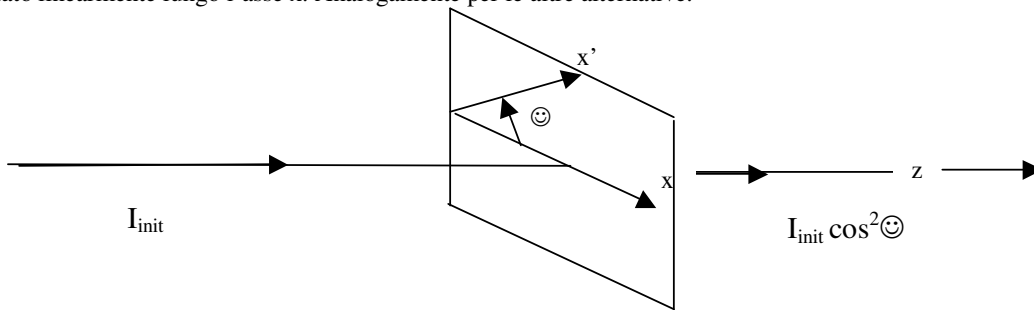
Osservazione: il principio 5 non può essere utilizzato per seguire l'evoluzione temporale di un sistema mentre questo è sottoposto a misura, perché l'ambiente, in questo caso, deve essere reattivo, nel senso che una parte di esso deve reagire in un modo se un'alternativa è vera, in modo diverso se è falsa. Può accadere, tuttavia, che il sistema e l'apparato di misura possano essere considerati come un unico sistema composto, il cui ambiente può essere considerato non reattivo.

Un esempio: i fotoni polarizzati linearmente.

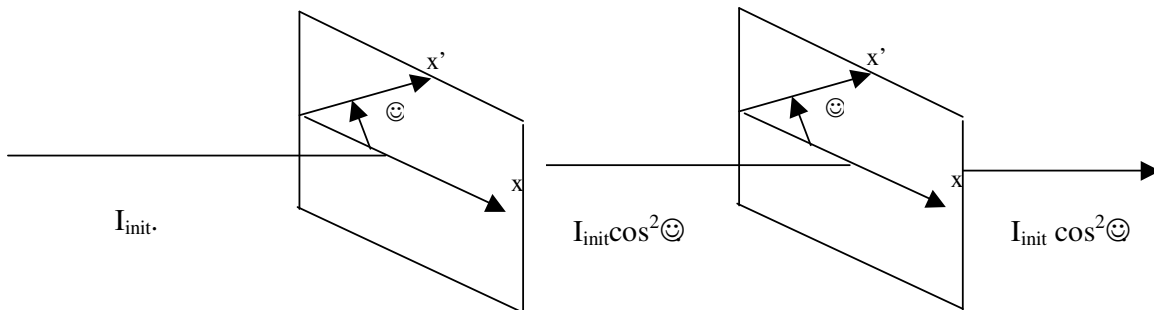
La luce polarizzata linearmente, incidente su uno strato di polaroid in direzione perpendicolare a esso, può essere considerata come un fascio di fotoni non correlati tra loro.

Se la direzione di propagazione di un fotone coincide con l'asse  $z$ , la direzione della sua polarizzazione lineare giace sul piano  $x$ - $y$ . Lo spazio vettoriale  $V_{pol}$  associato al sistema ha dimensione 2. Ogni stato può essere rappresentato come combinazione lineare di  $u_x$  e  $u_y$ , risp. versori degli assi  $x$  e  $y$ , oppure di due altri versori ortogonali  $u_{x'}$  e  $u_{y'}$ , ottenuti ruotando gli assi  $x$  e  $y$  di un angolo  $\vartheta$ .

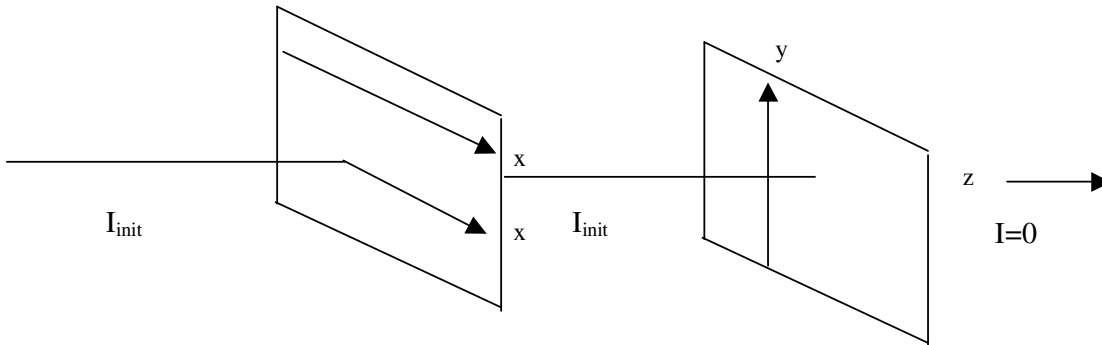
Sia  $E_x$  il sottospazio di  $V_{pol}$  costituito da tutti i vettori proporzionali a  $u_x$ . L'alternativa  $a_x$  è vera quando il fotone è polarizzato linearmente lungo l'asse  $x$ . Analogamente per le altre alternative.



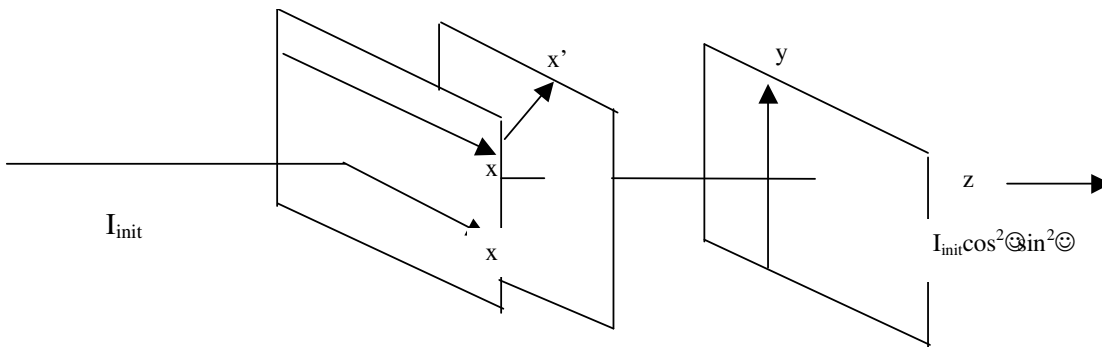
È ragionevole supporre che, quando un fotone incide su uno strato di polaroid con asse ottico secondo la direzione  $x'$ , si sia realizzata l'alternativa  $a_{x'}$ . In base al principio 3, la probabilità che  $a_{x'}$  sia vera è data dal quadrato della proiezione di  $u_x$  su  $x'$ , cioè  $\cos^2 \vartheta$  che coincide con la frequenza di passaggio di un fotone attraverso il polaroid. Possiamo anche affermare che lo stato di polarizzazione di tutti i fotoni che attraversano lo strato è dato dal versore  $u_{x'}$ .



Se un raggio, inizialmente polarizzato secondo l'asse  $x$  e con intensità  $I_{init}$ , è fatto incidere in successione su due strati polaroid con assi ottici  $x$  e  $y$  tra loro ortogonali, nessun fotone riesce ad attraversarli entrambi.



Questo fatto è previsto dalla meccanica quantistica perché i fotoni, dopo essere usciti dal primo strato, si trovano nello stato  $u_x$ , per cui la probabilità di passare attraverso il secondo strato è data da  $\|P_{Ey}\|^2 = 0$ .



Se inseriamo un nuovo strato con asse ottico nella direzione  $x'$ , l'intensità del fascio emergente dalla successione dei tre strati di polaroid non è più zero, ma  $I_{fin} = I_{init} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta$ ,

relazione che può essere verificata sperimentalmente facendo variare l'angolo  $\vartheta$ .

La coppia di polarizzatori incrociati, inizialmente opaca, è resa parzialmente trasparente mediante l'inserimento di uno strato intermedio, anche se, ragionando in base al senso comune, sembrerebbe che il nuovo strato dovesse costituire un nuovo ostacolo alla propagazione dei fotoni.

Se si utilizza la meccanica quantistica, i fotoni che escono dal primo strato si trovano nello stato  $u_x$  e la probabilità che regola il loro passaggio intermedio è data da

$$\|P_{Ex'} u_x\|^2 = \|\cos \vartheta u_{x'}\|^2 = \cos^2 \vartheta$$

ma ogni fotone che emerge dallo strato intermedio è nello stato  $u_{x'}$ , dunque la probabilità di un suo passaggio attraverso l'ultimo strato è

$$\|P_{Ey} u_{x'}\|^2 = \|\cos(\pi/2 - \vartheta) u_{x'}\|^2 = \sin^2 \vartheta$$

La probabilità di passaggio attraverso la successione di tre strati è data allora da

$$\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta$$

In accordo con l'intensità  $I_{fin}$  trovata sperimentalmente.